Logaritmos y biodiversidad: ideas para cuantificar especies

J. César Domínguez Galván

Cada vez que veo un documental sobre animales o plantas no puedo evitar sentirme asombrado por tanta variedad, belleza y capacidad de adaptación. Todos y cada uno de los seres que habitan el planeta, desde los grandes mamíferos hasta el más diminuto vegetal, representan una tonalidad en el amplio y colorido espectro de la diversidad biológica. Hábiles nadadores y bellas trepadoras, gráciles voladores y estoicas sobrevivientes del desierto: cada especie lucha día a día por su permanencia en el planeta y, desafortunadamente, muchas de ellas ya han pasado a la triste "lista negra" de las especies extintas.

La biodiversidad, que de acuerdo con la ONU se define como la amplia variedad de seres vivos sobre la Tierra y los patrones que la conforman, representa **nuestra riqueza natural y como tal es susceptible de ser investigada, modelada y cuantificada.** ¿Cómo se puede lograr esto último? Las siguientes líneas se han escrito para dar una respuesta aceptable a esa pregunta.

Para Citar

Para citar este artículo en formato APA copia el siguiente texto y completa la información indicada en los paréntesis

"Domínguez, C. (2012). Logaritmos y biodiversidad: ideas para cuantificar especies [Versión electrónica], *Ciencia Compartida*, 5, 6-12. Recuperado el (día) de (mes) de (año), de (dirección electrónica)."

Loga ¿qué?

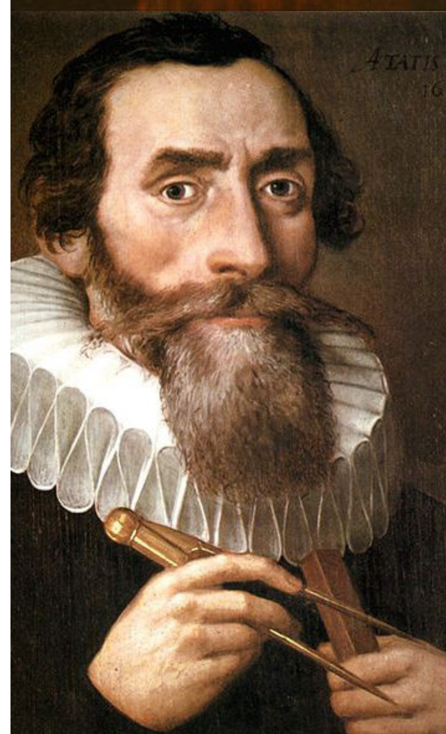
Además de la naturaleza, en el mundo de las matemáticas también hay una variedad importante de entes, unos más complejos que otros, pero, al final, todos interesantes y con su debida importancia dentro del cuerpo matemático. Una "especie" que pertenece al campo de las matemáticas son los logaritmos, que se definen –de manera formal- como **el exponente al que hay que elevar una cantidad (llamada base) para obtener un número determinado.** Una manera natural de acercarse a esta operación aritmética es por medio de su inversa, o sea, la exponenciación. Por ejemplo, si tenemos $5^3=125$, entonces afirmamos que $\log_5 125=3$, es decir, 3 es el exponente al que tenemos que elevar el 5 para que nos dé como resultado 125 o, dicho en términos un poquito más técnicos, el logaritmo de 125 en base 5 es 3.

Los logaritmos fueron usados por primera vez en el siglo XV por John Napier, un matemático escocés que nació en 1550. Pero -como ha ocurrido en diferentes momentos de la historia de las matemáticas- la comunidad científica de la época de Napier no estaba muy contenta con el uso de esta operación; no fue sino hasta que otro ilustre científico de nombre Johannes Kepler, originario de Alemania, **utilizó los logaritmos como una herramienta bastante poderosa para simplificar cálculos astronómicos** que esta entidad matemática fue reconocida. Por cierto –y para retomar un poco el tema de la diversidad biológica-, en el mismo siglo en que aparecieron los logaritmos también se veía por primera vez a un animal llamado Guará –mejor conocido como “zorrolobo”-, un canino originario de las Islas Malvinas y del que ahora sólo se hallan algunos ejemplares disecados, pues lamentablemente se encuentra extinto desde hace varias décadas.

Los logaritmos, sin embargo, han sobrevivido durante los últimos quinientos años. Se trata de una operación que para dominarla se requiere práctica –como todas las demás-, pero que cuando se logra manejar apropiadamente, junto con todas sus propiedades, puede resultar de gran utilidad (el propio Kepler estaría de acuerdo con esto). Tan es así, que en el primer año de bachillerato los logaritmos se convierten en uno de los temas que profesores y alumnos deben abordar, y ya al final de ese nivel aparecen como uno de los objetos de estudio del Cálculo Diferencial e Integral.

Si recordamos la definición de logaritmo que dimos en uno de los párrafos anteriores, veremos que, por ejemplo, existen muchos números que son candidatos a ser “bases”. En el ejemplo utilizamos al 5, pero también pueden ser números

John Napier (1550 – 1617)



Johannes Kepler (1571 – 1630)

Aquellos quienes nos dedicamos a la docencia (...) nos enfrentamos a una pregunta muy popular entre los estudiantes: ¿y eso para qué me va a servir?

decimales como 3.1416 (¿se te hace conocido?) 0.5 ó 1.0001; pero hay que tener cuidado, pues **no existen logaritmos de números negativos** (ya en otra ocasión, con un poquito más de espacio, veremos la razón de este fenómeno).

¡Midamos la variedad!

Aquellos quienes nos dedicamos a la docencia de las matemáticas –o incluso de otras materias- con frecuencia nos enfrentamos a una pregunta muy popular entre los estudiantes: ¿y eso para qué me va a servir? Aunque se puede dar toda una discusión para responder a tan inquietante cuestionamiento, en estas líneas nos limitaremos a dar un ejemplo de la utilidad de las matemáticas –particularmente de los logaritmos- en el campo de la biología.

Pensemos, por ejemplo, en la siguiente pregunta: ¿cómo se mide la biodiversidad? O dicho de otra forma, **¿cómo podríamos determinar qué tan diverso es un ecosistema determinado?** Esta inquietud se la han planteado varios ecólogos, quienes con ayuda de las matemáticas han propuesto diferentes maneras de cuantificar la presencia de especies. A continuación veremos un par de estas formas de medir la biodiversidad (a las cuales llamaremos índices), pero antes es necesario aclarar que cada una de ellas proporciona información parcial y no describen con absoluta precisión la distribución de la diversidad biológica, aunque sí representan una buena aproximación de la misma. Eso sí, para comprender la diferencia de efectividad entre estos índices, será necesario

> *Parecería que este asunto ya se puso rudo, que quizá hay demasiados símbolos, pero en realidad no es así.*

hacer algunas cuentas, pero nada que la calculadora de tu computadora no pueda hacer.

Dos maneras de ver la bio

El primer indicador del que queremos hablar es el llamado *índice de Margalef* y se calcula mediante la siguiente operación:

$$D = \frac{S-1}{\log N}$$

en donde D denota la biodiversidad, S es el número total de especies y N representa el número total de individuos que hay en un lugar dado. Veámoslo en un ejemplo: supongamos que en un pequeño ecosistema se han encontrado tres especies animales y un estudio ha determinado que la población es de 20 lechuzas, 90 ratones y 40 insectos, es decir, en total hay 150 individuos. De acuerdo con la ecuación anterior, que fue presentada en 1958 por el ecólogo español Ramón Margalef, tendríamos que el ecosistema hipotético que hemos planteado aquí tiene el siguiente índice de biodiversidad:

$$D = \frac{3-1}{\log 150} = \frac{2}{2.17609} = 0.91907$$

Para interpretar este indicador debemos tomar en cuenta que si el resultado de la ecuación es inferior a 2, estamos hablando de una baja biodiversidad (lo que se corresponde muy bien con nuestro ejemplo) y que si es mayor o igual a 5, se considera de alta biodiversidad. Además, aquí se puede apreciar claramente una aplicación muy concreta de los logaritmos; veamos con un poco más de detalle este aspecto.

Si nos fijamos con cuidado en las igualdades descritas arriba, podemos inferir rápidamente que $\log 150 = 2.17609$. ¿Qué es lo primero que salta a la vista? Pues pareciera que ese logaritmo no tiene base; en realidad lo que sucede es que la base es 10, pero la comunidad matemática ha convenido en no escribir explícitamente esta base en la notación del logaritmo. En otras palabras, $\log 150 = \log_{10} 150 = 2.17609$. Ahora sí, la pregunta sería ¿qué significa esta expresión? Pues simplemente que el exponente al que hay que elevar 10 para que nos dé 150 es 2.17609 ¿Será cierto? Si quieres comprobarlo, calcula $10^{2.17609}$ y revisa qué número te da.

Regresando al Índice de Margalef, veremos que **es un indicador algo impreciso, pues no toma en cuenta la distribución de cada especie**. Es decir, si la cantidad de lechuzas fuera, por ejemplo, 100, y la de ratones e insectos **45 y 5**, respectivamente, el índice sería exactamente el mismo, pues sigue habiendo 3 especies y 150 individuos en total, aunque distribuidos de una manera completamente distinta a la primera.

Es tiempo de conocer un indicador un poco distinto. Se le conoce como *índice de Shannon-Weaver* y está basado en la Teoría de la Información, muy popular en la década de los cincuentas. Se calcula de la siguiente manera:

$$D = -\sum_{i-1}^{s} p_i \cdot log_2 p_i$$

¡Ah caray! Parecería que este asunto ya se puso rudo, que quizá hay demasiados símbolos, pero en realidad no es así. Veámoslo con detenimiento. Ese signo que parece una **"E"** denota de manera simplificada una suma. ¿Y qué significa eso de p_i?

Bueno, para esta fórmula $p_i = \frac{n_i}{N}$, es decir, el número de individuos de cada especie dividido entre el número total de individuos del ecosistema. Así, lo que quiere decir la ecuación anterior es que -considerando nuestro ejemplo inicial - tendríamos lo siguiente:

$$D = p_1 \bullet \log_2 p_1 + p_2 \bullet \log_2 p_2 + p_3 \bullet \log_2 p_3$$

Pero...

$$p_1 = \frac{n_1}{N} = \frac{20}{150} = 0.1333$$

$$p_2 = \frac{n_2}{N} = \frac{90}{150} = 0.6$$

$$p_3 = \frac{n_3}{N} = \frac{40}{150} = 0.26666$$

Entonces...

$$D = -(0.133333 \bullet \log_2 0.133333 + 0.6 \bullet \log_2 0.6 + 0.266666 \bullet \log_2 0.266666)$$

Logaritmo

$$\log_5 125 = 3$$

Base

Exponente

Punto extra 1

¿Cómo calcular un logaritmo en base 2? Ya sea que tengas una calculadora científica o que utilices la que viene incluida en tu sistema operativo Windows, la obtención de un logaritmo en base 2 no es inmediata (a menos que tengas una súper calculadora). Así que el truco para obtener este tipo de logaritmos es el siguiente: calcula primero el logaritmo en base 10 del número que buscas y luego divídelo entre el logaritmo en base 10 de 2. Es decir, lo que tu calculadora tiene que hacer para calcular el logaritmo en base de 2 de un número x (o sea $\log_2 x$) es:

$$\frac{\log x}{\log 2}$$

Por ejemplo, con la calculadora de Windows (deberá estar en modo "científica") podrías calcular $\log x$ tecleando lo siguiente (cada paso está separado por la flecha $\rightarrow$):

$$0.6 \rightarrow \log \rightarrow / \rightarrow 2 \rightarrow \log \rightarrow =$$

El resultado que te debe dar es **-0.73696559416620616641658048554**

Aquí hay que observar que la base del logaritmo para hacer los cálculos no es **10** sino **2**, como claramente se puede ver. Ahora bien, en la mayoría de las calculadoras no se pueden obtener directamente los logaritmos de base **2**, pero existe un truco muy sencillo para realizar las cuentas con cualquier calculadora científica, incluso la que está incluida en los programas de tu computadora *(véase el Punto extra 1)*. Ya con los cálculos debidamente hechos se tiene lo siguiente:

D=–(– 0.38758 – 0.442171 – 0.50850) =1.33825

De manera similar al índice anterior, cuanto mayor es el número que resulta, mayor es la biodiversidad del ecosistema; **si bien una diversidad biológica alta puede alcanzar 5 puntos, aún existen zonas del planeta que pueden superar esta cifra.**

De salida

Además de los dos índices que te hemos presentado en estas líneas, existe otro más que se denomina *índice de Simpson*. Sin embargo, más que hacer una revisión detallada de estos indicadores, lo que nos interesa es que veas, primero, una de las formas en la que se pueden relacionar dos áreas tan diferentes como son la matemática y la biología; y segundo, que aunque a veces las cosas que nos enseñan en la escuela parecen no tener ninguna relación con el mundo en que vivimos, basta con buscar un poquito para darse cuenta de que las aplicaciones de los conceptos matemáticos son muy diversas •

Fuentes:

http://es.wikipedia.org/wiki/Dusicyon_australis

http://www.cienciaybiologia.com/ecologia/biodiversidad-3.php

Trivia

Para terminar, hemos dejado una trivia relacionada con este artículo; manda tus respuestas a fdex2000@yahoo.com y si eres el primero en contestarlas correctamente te ganarás una película en formato DVD. ¡Anímate!

1.- ¿Qué resultado te da el índice de Shannon-Weaver si la población cambia a 100 lechuzas, 45 ratones y 5 insectos?

2.- ¿Cuál es el resultado del índice de Shannon-Weaver cuando sólo existe una especie? Argumenta tu respuesta.

3.- El lado derecho de la ecuación del índice de Shannon-Weaver empieza con un signo menos (-), pero el índice siempre es un número positivo, ¿por qué ocurre esto? Argumenta tu respuesta.